

Erzeugung und Berechnung schneller konzentrischer Stoßwellen in Helium

Von W. BÖTTICHER und H. DAMMANN

Aus dem Institut für Experimentalphysik der Universität Kiel
(Z. Naturforsch. **18 a**, 580–586 [1963]; eingegangen am 21. Januar 1963)

Mit einer Schmierkamera wird die Weg-Zeitkurve von konzentrischen Zylinderstoßwellen gemessen, die in einer linearen Pinchentladung auftreten. Die gasdynamische Berechnung der Strömung erfolgt im Anschluß an GUDERLEY¹. Der GUDERLEYSche Ansatz wird so erweitert, daß Abweichungen von den idealen Gasgesetzen (Ionisation) berücksichtigt werden. Die Ergebnisse der numerischen Rechnungen werden angegeben und mit spektroskopischen Messungen verglichen.

Magnetisch beschleunigte Stoßwellen als Hilfsmittel zur Herstellung von Hochtemperaturplasmen sind in letzter Zeit öfter untersucht worden. Im Gegensatz zu den meist benutzten ebenen Stoßwellen untersuchen wir hier Zylinderstoßwellen. Dabei ergeben sich durch den Wegfall von Randeffekten und wegen der räumlichen Symmetrie des den Magnetdruck erzeugenden Entladungsstromes übersichtliche und gut reproduzierbare Bedingungen.

I. Experimente

In einer linearen Pinchentladung bildet sich nach der Zündung nahe der Gefäßwand ein heißer stromführender Plasmahohlzylinder. Unter der Einwir-

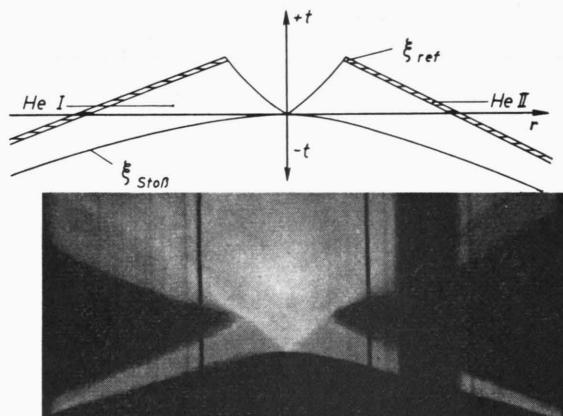


Abb. 1. Schmieraufnahme (end-on) einer Pinchentladung in He (Fülldruck 6 Torr, Gefäßdurchmesser 18 cm, Länge 50 cm). Auf dem beobachteten Durchmesser sind symmetrisch zur Achse des Gefäßes zwei Marken bei $r=1,5$ cm angebracht. Das Zentrum der zusammenlaufenden Zylinderstoßwelle liegt genau in dieser Achse. Die Entladung ist reproduzierbar bis zum Zeitpunkt $t=+0,53 \mu\text{sec}$, an dem die reflektierte Stoßwelle mit der He II-Zone zusammentrifft.

¹ G. GUDERLEY, Luftfahrtforschung **19**, 302 [1942].

² W. BÖTTICHER, Proc. 5. Int. Conf. Ionization Phenomena in Gases, München 1961, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Vol. 2, 2182.

kung der Stromkräfte kontrahiert sich dieser Zylinder mit Geschwindigkeiten von einigen $\text{cm}/\mu\text{sec}$. Eine Schmieraufnahme mit großer räumlicher und zeitlicher Auflösung der von uns untersuchten Entladung zeigt Abb. 1. Unsere spektroskopischen Messungen² haben ergeben, daß der leuchtende Hohlzylinder aus einer inneren Zone mit einer Temperatur von $24\,000^\circ\text{K}$ und einer äußeren schmalen und heller leuchtenden $50\,000^\circ\text{K}$ heißen Zone besteht. Die Dichte der inneren (He I-Zone) beträgt $15 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^3$. Die Dichte der äußeren Zone ist wesentlich kleiner. Neuere spektroskopische Aufnahmen³ zeigen außerhalb dieser heißen vorwiegend He II-Linien emittierenden Zone (He II-Zone) Linien von sehr hoch angeregtem verdampftem Gefäßmaterial (Duran 50), das offenbar hinter dem kontrahierten He zur Rohrachse hin strömt. Man findet z. B. Si III-, Si IV- und B III-Linien. Die Gesamtlichtemission aus diesem Gebiet ist aber trotzdem zu gering, um auf den Schmieraufnahmen eine Schwärzung hervorzurufen. Nach dem Einlauf der Stoßfront in die Zylinderachse baut sich eine reflektierte Stoßwelle auf. Diese endet beim Zusammentreffen mit der einlaufenden He II-Zone.

Wir beschreiben diese Beobachtungen durch folgendes Modell (vgl. ALLEN⁴). Der stromführende Hohlzylinder sammelt das ruhende Gas in einer Stoßwelle auf. In dem aufgesammelten Gas fließt kein wesentlicher Strom, d. h. dort findet nur geringe JOULESche Aufheizung statt, und der magnetische Druck ist klein. Die heller leuchtende äußere Zone stellt das Gebiet dar, in dem die Stromdichte merklich ansteigt. Ein Teil des Entladungsstromes fließt auch noch außerhalb dieser Zone in dem allein aus

³ O. E. BERGE, W. BÖTTICHER, G. KLEIST u. U. KOGELSCHATZ, La-borbericht Nr. 6, Inst. f. Exp. Physik, Kiel 1962, unveröffentlicht.

⁴ J. E. ALLEN, Proc. Phys. Soc., Lond. B **70**, 24 [1957].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

verdampften Gefäßmaterial gebildeten Plasma sehr geringer Dichte. Daß in diesem Gebiet kein Helium mehr vorhanden sein kann, ergibt sich aus dem Fehlen von Heliumlinien neben den anderen hochangeregten Linien.

Ziel der im folgenden beschriebenen Rechnungen ist nicht, den Zusammenhang zwischen dem Entladungsstrom und der Stoßwellengeschwindigkeit darzustellen. Wir wollen vielmehr für ein begrenztes noch nicht stromführendes Stück hinter der Stoßwellenfront aus der beobachteten Stoßwellengeschwindigkeit Temperatur und Dichte in dieser Schicht ermitteln und diese berechneten Werte mit den spektroskopisch bestimmten Daten vergleichen.

II. Die Grundgleichungen der Plasmaströmung

Die thermodynamischen Daten und die Strömungsgeschwindigkeit der inneren nicht stromführenden Schicht können in unserem Modell gasdynamisch bestimmt werden. Die Gasströmung hinter der Stoßwelle wird dabei durch folgende Differentialgleichungen beschrieben:

$$\text{Massenerhaltung } \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = -\varrho_t, \quad (1)$$

$$\text{Impulserhaltung } \varrho \dot{\mathbf{v}} = -\operatorname{grad} p, \quad (2)$$

$$\text{Entropieerhaltung } \dot{S} = 0. \quad (3)$$

Es bedeuten ϱ Dichte, \mathbf{v} Geschwindigkeit der Gas- teilchen, p Druck, S spezifische Entropie.

Gl. (1) ist sicher erfüllt, (2) bringt zum Ausdruck, daß auf die Gasteilchen nur Druckkräfte wirken sollen. In (3) wird angenommen, daß – von Stoßwellen abgesehen – die Zustandsänderungen des Gases reversibel verlaufen, es wird also von Wärmeleitung, Diffusion und Strahlungsverlusten abgesehen.

In den für uns zweckmäßigen Zylinderkoordinaten lauten die Gleichungen in EULERScher Form

$$\varrho_t + (\varrho v)_r + \frac{1}{r} (\varrho v) = 0, \quad (4a)$$

$$v_t + v v_r + \frac{1}{\varrho} p_r = 0, \quad (4b)$$

$$S_t + v S_r = 0. \quad (4c)$$

Die vierte Gleichung zur Bestimmung von p , ϱ , v und S ist die Zustandsgleichung des betreffenden Gases.

Die Zustandsgrößen unmittelbar hinter der Stoßwellenfront ergeben sich aus den Stoßwellengleichungen:

$$\varrho_2(v_2 - u) = \varrho_1(v_1 - u), \quad (5a)$$

$$p_2 + \varrho_2(v_2 - u)^2 = \varrho_1(v_1 - u)^2 + p_1, \quad (5b)$$

$$i_2 + \frac{1}{2}(v_2 - u)^2 = \frac{1}{2}(v_1 - u)^2 + i_1. \quad (5c)$$

Dabei ist u die Geschwindigkeit der Stoßwellenfront und i die spezifische Enthalpie. Durch die Indizes 1 und 2 werden die beiden Seiten der Front unterschieden.

Die Berechnung der Gasströmung hinter einer konzentrischen Stoßwelle an Hand der Gl. (4) und (5) ist zuerst von GUDERLEY¹ durchgeführt worden. Er erhält unter gleich noch zu nennenden Voraussetzungen Homologielösungen, indem er von dem Weg-Zeit-Diagramm der Stoßwellenfront als Randbedingung ausgeht. Diese Lösungen sind damit nur in dem Gebiet gültig, das durch das benutzte (bzw. experimentell bekannte) Stück der Randkurve bestimmt wird.

Ein anderer Weg besteht darin, zusätzliche Annahmen über die die Strömung antreibenden Stromkräfte zu machen und von diesen „äußerem“ Randwerten ausgehend die Strömungsgleichungen zu lösen. Man gelangt auf diese Weise aber nur zu sehr speziellen nicht homologen Lösungen. Dieser Weg ist daher nur dann sinnvoll, wenn genaue Daten über die raumzeitliche Verteilung der Stromdichte im gesamten Entladungsrohr vorliegen.

III. Die Guderleysche Lösung für ideale Gase

Im folgenden soll die GUDERLEYSche Rechnung nur in dem Umfang wiedergegeben werden, der notwendig ist, um die von uns vorgenommenen Erweiterungen begründen zu können.

Zur Festlegung der Randwerte wird von der Weg-Zeit-Kurve der Stoßfront ausgegangen, die die Form

$$r = a(-t)^n \quad (6)$$

haben soll (Koordinatensystem wie in Abb. 1). Weiter wird gefordert, daß die Stoßwellengeschwindigkeit u so groß ist, daß die Bedingungen für starken Stoß erfüllt sind. Das heißt, es soll sowohl

$$p_2 \gg p_1 \text{ als auch } i_2 \gg i_1 \text{ sein.}$$

Zusätzlich soll auch $v_1 = 0$ sein. Für ein Gas, dessen spezifische Enthalpie durch

$$i = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\varrho} \quad (7)$$

($\gamma = c_p/c_v = \text{const}$) gegeben ist, vereinfachen sich dann die Stoßbedingungen zu

$$\varrho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \varrho_1, \quad (8a)$$

$$p_2 = \frac{2}{\gamma+1} \varrho_1 u^2, \quad (8b)$$

$$v_2 = \frac{2}{\gamma+1} u. \quad (8c)$$

Ist nach (6) $u = \dot{r} = -n a^{1/n} r^{1-1/n}$, so folgt auf dieser Kurve

$$\varrho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \varrho_1, \quad (9a)$$

$$p_2 = \frac{2}{\gamma+1} \varrho_1 n^2 a^{2/n} r^{2-2/n}. \quad (9b)$$

$$v_2 = -\frac{2}{\gamma+1} n a^{1/n} r^{1-1/n}. \quad (9c)$$

Führt man jetzt noch die Variable $\xi = r / (\mp t)^n$ ein ($-t$ für $t < 0$, $+t$ für $t > 0$), so erhält man für die Stoßwelle, auf der ja $\xi_{St} = a$ ist,

$$\varrho_2 = R(\xi_{St}), \quad (10a)$$

$$p_2 = P(\xi_{St}) r^{2-2/n}, \quad (10b)$$

$$v_2 = V(\xi_{St}) r^{1-1/n}. \quad (10c)$$

Als letzte Voraussetzung fordert man, daß die Zustandsgleichung die Form

$$p \varrho^{-\alpha} = F(S), \quad \alpha = \text{const} \quad (11)$$

hat, wobei $F(S)$ nicht explizit bekannt sein muß. Unter diesen Voraussetzungen macht GUDERLEY in Anlehnung an (10) für die Lösung den Ansatz

$$\varrho = R(\xi), \quad (12a)$$

$$p = P(\xi) r^{2-2/n}, \quad (12b)$$

$$v = V(\xi) r^{1-1/n}. \quad (12c)$$

Geht man damit in das System (4) ein, so fällt die Veränderliche r heraus. Durch weitere Transformationen wird das Problem auf die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung und zwei Quadraturen reduziert.

IV. Erweiterung des Guderleyschen Ansatzes für hohe Temperaturen

a) Die thermodynamischen Größen bei hohen Temperaturen

Bei den uns interessierenden Stoßwellengeschwindigkeiten finden hinter der Front Anregungs-, Dissoziations- und Ionisationsprozesse statt, die in den bisher benutzten thermodynamischen Formeln nicht berücksichtigt sind. Der GUDERLEYSche Ansatz setzt aber voraus, daß die Randwerte sich aus einer Beziehung der Form (8) ergeben und daß im Gebiet der Strömung die Gleichung (11) erfüllt ist. Wir haben deshalb mit p und T als unabhängigen Variablen nach den Methoden der statistischen Thermodynamik die Zustandsgrößen berechnet. Bei Kennt-

nis dieser Werte ist es möglich, aus den Gln. (5) die Größen hinter dem Stoß mit Hilfe der HUGONIOT-Gleichung exakt zu bestimmen. Es wurde nun geprüft, ob sich die so erhaltenen Werte durch Ausdrücke der gewünschten Form (8) mit $\gamma = \text{const}$ näherungsweise darstellen lassen. Dazu wurden p , ϱ und v^2 als Funktion von u^2 aufgetragen. Entsprechend wurde für die Zustandsgleichung verfahren. Trägt man Kurven $\lg \varrho$ gegen $\lg p$ für $S = \text{const}$ auf, so erhält man, falls die Zustandsgleichung die Form (11) mit $\alpha = \text{const}$ hat, parallele Geraden.

Die zur Anwendung des eben geschilderten Verfahrens notwendigen thermodynamischen Daten von He wurden von uns im Druckbereich von 1 bis 10^4 Bar (21 Druck-Werte) für Temperaturen von 10000° bis zu der Temperatur, bei der die Teilchenzahl von $\text{He}^{++} \geq 10^3 \text{ He}^+$ ist, in Intervallen von 2000° berechnet. Abb. 2 zeigt die in der beschrie-

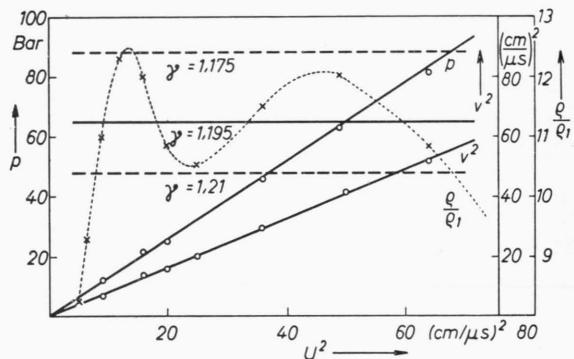


Abb. 2. Zustandsgrößen hinter der Front von Stoßwellen, die mit der Geschwindigkeit U in He der Dichte $\varrho_1 = 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^3$ laufen. Die ausgezogenen Kurven ergeben sich bei Annahme von $\gamma = 1,195$. Die exakt berechneten Werte sind für p und v^2 durch \circ bzw. für ϱ/ϱ_1 durch \times eingezeichnet.

benen Weise berechneten Zustände hinter der Front als Funktion von u^2 . Im ruhenden Gas wurde mit einer Dichte von $1,4 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^3$ gerechnet. Als Näherungswert für γ wurde von uns auf Grund dieser Kurven $\gamma = 1,195$ gewählt. Die beiden Maxima des Dichtesprungs entsprechen den beiden Ionisationsstufen des Heliums. Das Diagramm der Zustandsfunktion (Abb. 3) zeigt, daß hier die Forderung $\alpha = \text{const}$ nicht sehr gut erfüllt ist. Als Näherung wählen wir $\alpha = 1,25$. Es wird sich später zeigen, daß die Abhängigkeit der Lösungen von α nicht sehr stark ist. Auf der in Abb. 3 gestrichelt eingezeichneten Kurve liegen die in Abb. 2 gezeigten Zustände direkt hinter der Front.

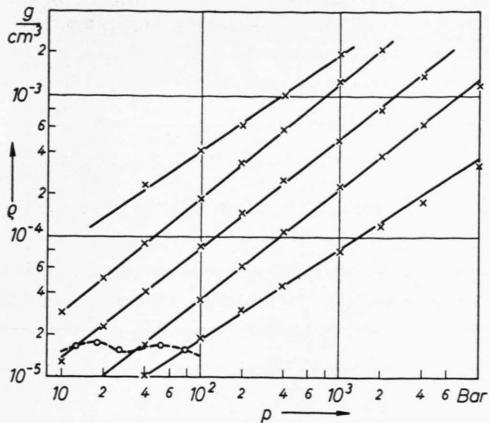


Abb. 3. Die Dichte von Helium als Funktion von Druck p mit der Entropie S als Parameter. Die gestrichelte Kurve verbindet die Wertepaare p, q aus Abb. 2.

An Hand der von KROEPLIN und NEUMANN⁵ berechneten thermodynamischen Daten von Luft (Bereich $10^{-2} < p < 10^3$ Bar; $6000^\circ\text{K} < T < 150\,000^\circ\text{K}$) wurden die entsprechenden Diagramme für Stoßwellen in Luft berechnet. Als Anfangsdruck wählten wir $p = 0,88$ Torr, um wieder die Anfangsdichte $\varrho_1 = 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^{-3}$ zu erhalten. Die Zustände hinter der Front zeigt Abb. 4. Man sieht, daß

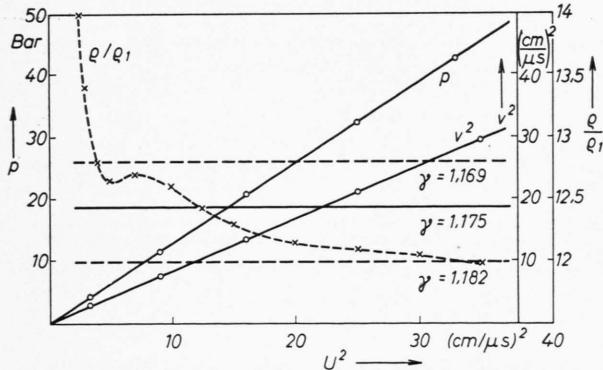


Abb. 4. Zustandsgrößen hinter der Front von Stoßwellen, die mit der Geschwindigkeit U in Luft der Dichte $\varrho_1 = 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ g pro cm}^3$ laufen. Die ausgezogenen Kurven ergeben sich bei Annahme von $\gamma = 1,175$. Die exakt berechneten Werte sind für p und v^2 durch \circ bzw. für q/q_1 durch \times eingezeichnet.

für Stoßwellengeschwindigkeiten zwischen 2 und $6,3 \text{ cm}/\mu\text{sec}$ der Wert $\gamma = 1,175$ eine gute Näherung darstellt. Auch für die Zustandsgleichung (Abb. 5)

$$\frac{dv}{d\mu} = \frac{2(\nu-1)}{\mu} \cdot \frac{2\mu^2 \left(\zeta \nu + 1 - \frac{1}{n} \right) - \zeta \nu (\nu-1) \left(\nu - \frac{1}{n} \right)}{2\mu^2 \left[\zeta(\nu-1) + 1 - \frac{1}{n} \right] + \zeta(\nu-1) \left[-(\zeta+1) \nu^2 + \left(\frac{3-\zeta}{n} + 2\zeta \right) \nu - \frac{2}{n} \right]}. \quad (13a)$$

⁵ H. KROEPLIN u. K. NEUMANN, Technische Hochschule Braunschweig. Wir danken hiermit für die Überlassung der unveröffentlichten Daten.

ist eine Näherung durch konstantes ζ möglich. Es ergibt sich $\zeta = 1,21$. Die gestrichelte Kurve verbindet wieder die in Abb. 4 gezeigten Zustände.

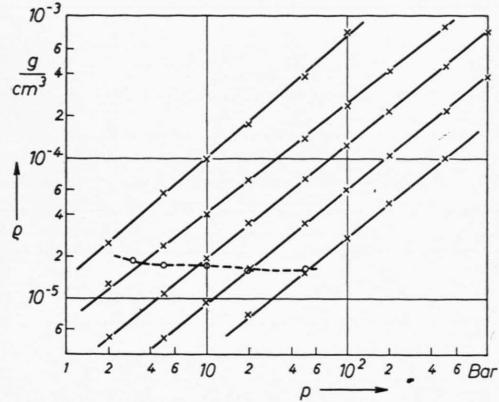


Abb. 5. Die Dichte von Luft als Funktion vom Druck p mit der Entropie S als Parameter. Die gestrichelte Kurve verbindet die Wertepaare p, q aus Abb. 4.

b) Änderungen im Lösungsverfahren

Man sieht, daß sich in beiden Fällen im Gegensatz zu GUDERLEY für γ und ζ verschiedene Werte ergeben. Es ist nun ohne weiteres möglich, die GUDERLEYSche Rechnung auf diesen Fall zu erweitern. Eine Änderung des Homologiecharakters der Lösung kann dabei nicht auftreten, da ja γ und ζ dimensionslose Größen sind. Um die Darstellung der weiteren Rechnung nicht zu ausführlich werden zu lassen (in den wesentlichen Teilen muß sowieso auf die Begründungen in der GUDERLEYSchen Arbeit verwiesen werden), werden wir im folgenden nur noch die Gleichungen angeben, die von den entsprechenden GUDERLEYSchen (die wir durch ein vorgesetztes G bezeichnen) abweichen.

Nach Einführung der Variablen ξ und des Ansatzes (12) führt GUDERLEY in (G 11) eine weitere Transformation auf Variable μ und ν durch. Diese Transformation schreibt sich in unserem Fall

$$\mu = \frac{A}{n \xi^{1/n}}, \quad \nu = \mp \frac{V}{n \xi^{1/n}}, \quad (13)$$

wobei $A^2 = \zeta(P/R)$ ist.

Man erhält damit die unveränderte GUDERLEYSche Differentialgleichung (G 13 a) :

$$\frac{dv}{d\mu} = \frac{2(\nu-1)}{\mu} \cdot \frac{2\mu^2 \left(\zeta \nu + 1 - \frac{1}{n} \right) - \zeta \nu (\nu-1) \left(\nu - \frac{1}{n} \right)}{2\mu^2 \left[\zeta(\nu-1) + 1 - \frac{1}{n} \right] + \zeta(\nu-1) \left[-(\zeta+1) \nu^2 + \left(\frac{3-\zeta}{n} + 2\zeta \right) \nu - \frac{2}{n} \right]}. \quad (13a)$$

Eine Änderung tritt aber ein, wenn wir die Randbedingungen (9) der Transformation (13) unterziehen. Im Gegensatz zu (G 9) enthält nämlich (9) nicht α , sondern γ . Dementsprechend ergibt sich für den Anfangspunkt A von (G 13 a), wie man durch Einsetzen ausrechnet, anstatt (G 16)

$$\mu_2 = \frac{\sqrt{2\alpha(\alpha-1)}}{\alpha+1}, \quad \nu_2 = \frac{2}{\alpha+1} \quad (G. 16)$$

unsere Gleichung (14)

$$\mu_2 = \frac{\sqrt{2\alpha(\gamma-1)}}{\gamma+1}, \quad \nu_2 = \frac{2}{\gamma+1}. \quad (14)$$

Von diesem Anfangspunkt A ausgehend wird jetzt die sonst unveränderte Differentialgleichung nach den bei GUDERLEY angegebenen Methoden gelöst. Eine zweite Änderung tritt erst auf bei der Berechnung des Sprunges der Zustandsgrößen beim Überschreiten des reflektierten Stoßes. Hier werden die Stoßgleichungen (5) für schwachen Stoß mit $v_1 \neq 0$ benötigt. Wir schreiben auch hier die Enthalpie in der Form

$$i = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\varrho}$$

mit den oben berechneten γ -Werten. Transformiert man jetzt wieder mit (13) in die μ, ν -Ebene, so erhält man an Stelle von (G 15) unsere Gl. (15)

$$\begin{aligned} \nu_2 - 1 &= \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right) \frac{\mu_1^2}{\nu_1 - 1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (\nu_1 - 1), \\ \mu_2^2 &= \mu_1^2 + \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right) \frac{\gamma-1}{2} [(\nu_1 - 1)^2 - (\nu_2 - 1)^2], \\ R_2/R_1 &= (\nu_1 - 1) / (\nu_2 - 1). \end{aligned} \quad (15)$$

Beim Vergleich der Formeln (15) und (G 15) sieht man, daß in (15) die Faktoren (γ/α) bzw. (α/γ) neu hinzutreten. Sonst wird genau so wie bei GUDERLEY verfahren.

V. Geschlossene Integrale

Selbstähnliche eindimensionale Gasströmungen sind in allgemeiner Form von SEDOV⁶ behandelt worden. Danach ist es unter bestimmten Voraussetzungen⁷ möglich, geschlossene Lösungen des Differentialgleichungssystems (4) anzugeben. In unserem Fall erhält man nur das Massenintegral und das Entropieintegral.

Das Massenintegral schreibt sich in der Form

$$M = \pi \varrho r^2 (1 - v t / n r). \quad (16)$$

M ist die Masse, die sich pro Längeneinheit innerhalb eines Zylinders vom Radius r befindet

$$M = \int_0^r 2\pi r dr.$$

Für ein Teilchen hat M den konstanten Wert $\pi \varrho_1 R^2$ (R Ausgangsradius des Teilchens).

Aus dem Entropieintegral ergibt sich folgende Beziehung zwischen p, ϱ, v, r und t

$$\varrho^{n\alpha/(1-n)-1} = c^* r^2 \left(1 - \frac{v t}{n r} \right) p^{n/(1-n)}, \quad (17)$$

wobei die Konstante c^* durch

$$c^* = \left[\frac{2 n^2}{\gamma+1} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^\alpha a^{2/n} \varrho_1^{1/n-\alpha} \right]^{n/(1-n)} \quad (17a)$$

gegeben ist.

Diese Beziehung (17) reduziert das System (4) auf zwei Gleichungen, erspart aber nur eine Quadratur. Sie gibt aber eine einfache Möglichkeit zur Kontrolle der numerischen Ergebnisse.

VI. Ergebnisse der Rechnungen

Alle numerischen Rechnungen wurden auf der IBM 704 durchgeführt⁸. Für seine Hilfe bei den Rechnungen und der Aufstellung der Programme danken wir Herrn A. BÖHM. Einzelheiten zum Programm sind bei DAMMANN⁹ zu finden.

Bei der Darstellung der Ergebnisse benutzen wir die Tatsache, daß die Strömung selbstähnlich ist. Wir betrachten die Funktionswerte an einem festen Radius r_0 und normieren die betrachteten Größen p, v oder ϱ auf die Werte (8) bzw. (9), die unmittelbar hinter der Stoßfront herrschen, wenn diese zum Zeitpunkt t_0 durch die Stelle r_0 läuft. Die so normierten Werte sind dann nur noch eine Funktion von t/t_0 (Definition der Selbstähnlichkeit).

Um einen Überblick über die Abhängigkeit der Lösungen von den gewählten Wertepaaren γ und α zu erhalten, wurden außer mit den oben für Luft und Helium bestimmten Werten auch noch mit vier anderen Kombinationen gerechnet. Die zu den einzelnen Werten errechneten Exponenten n sind in Tab. 1 angegeben.

⁶ L. I. SEDOV, Similarity and Dimensional Methods in Mechanics, Verlag Infosearch, London 1961.

⁷ L. I. SEDOV, l. c. ⁶, Kap. IV, § 3.

⁸ Wir danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Bereitstellung von Rechenzeiten.

⁹ H. DAMMANN, Diplomarbeit, Kiel 1962, unveröffentlicht.

Nr.	γ	α	n	
1.	1,165	1,210	0,8653	
2.	1,175	1,210	0,8638	Luft
3.	1,175	1,230	0,8629	
4.	1,195	1,25	0,8588	Helium
5.	1,195	1,285	0,8568	
6.	1,310	1,235	0,8494	
7.	1,4	1,4	0,834	GUDERLEY

Tab. 1.

Die Ergebnisse für p , ϱ und v sind in den Abb. 6 bis 8 dargestellt.

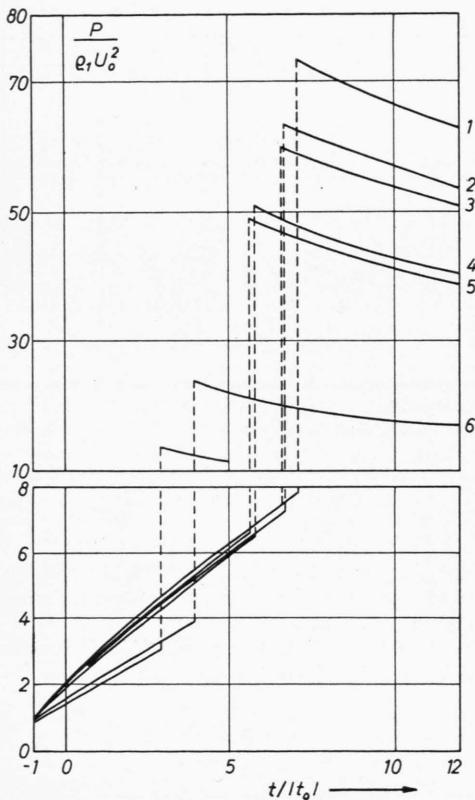


Abb. 6. Auf $\varrho_1 U_0^2$ normierter Druckverlauf an der Stelle r_0 als Funktion von $t/|t_0|$. Die hinlaufende Stoßwelle durchläuft $r=r_0$ zur Zeit $t=-t_0$ mit der Geschwindigkeit U_0 . Die sieben Kurven entsprechen den verschiedenen Wertepaaren aus Tab. 1.

Da für jedes Wertepaar α und γ und damit jeden Anfangspunkt μ_A (14) die Diff.-Gl. (G 13 a) neu numerisch gelöst werden muß, haben wir versucht, aus den berechneten Lösungen Interpolationsformeln abzuleiten. Wir fanden dabei folgende Beziehungen:

Für die Dichte ϱ_3 im Zeitnullpunkt, d. h. ϱ für $\xi = \infty$, gilt

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_3} \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{2}{\mu_A^2} - 4 \right) = 0,508 \pm 1\%. \quad (18)$$

Für die Dichte ϱ_4 vor dem reflektierten Stoß, d. h. ϱ für $\xi = \xi_{\text{ref}}$ gilt

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_4} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{2}{\mu_A^2} - 4 \right) = 1,46 \pm 1\%. \quad (19)$$

Für das Verhältnis $\xi_{\text{Stoß}}/\xi_{\text{ref}}$ gilt

$$(\xi_{\text{Stoß}}/\xi_{\text{ref}}) \cdot \frac{1}{2} \mu_A^2 = 0,232 \pm 1\% \quad (20)$$

Das Massenintegral (16) reduziert sich für $t=0$ auf

$$M = \pi \varrho_1 R^2 = \pi \varrho_3 r^2.$$

Man kann daher mit Hilfe von (18) für $t=0$ sofort angeben, an welchem Radius r sich ein Teilchen befindet, das sich anfangs am Ort R befand.

Aus (20) erhält man das experimentell leicht zu bestimmende Verhältnis der Geschwindigkeiten von einlaufender und reflektierter Stoßwelle

$$\frac{v_{\text{Stoß}}}{v_{\text{ref}}} = \left(\frac{\xi_{\text{Stoß}}}{\xi_{\text{ref}}} \right)^{1/n} = \left(\frac{0,464}{\mu_A^2} \right)^{1/n}. \quad (21)$$

Im Exponenten $1/n$ kann man dabei ohne Verlust an Genauigkeit mit einem Mittelwert $n=0,86$ rechnen.

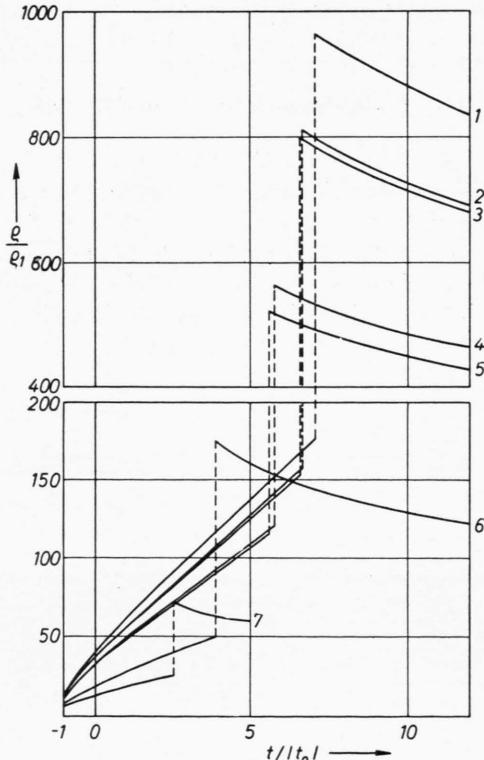


Abb. 7. Auf ϱ_1 normierter Dichtevelauf an der Stelle r_0 als Funktion von $t/|t_0|$.

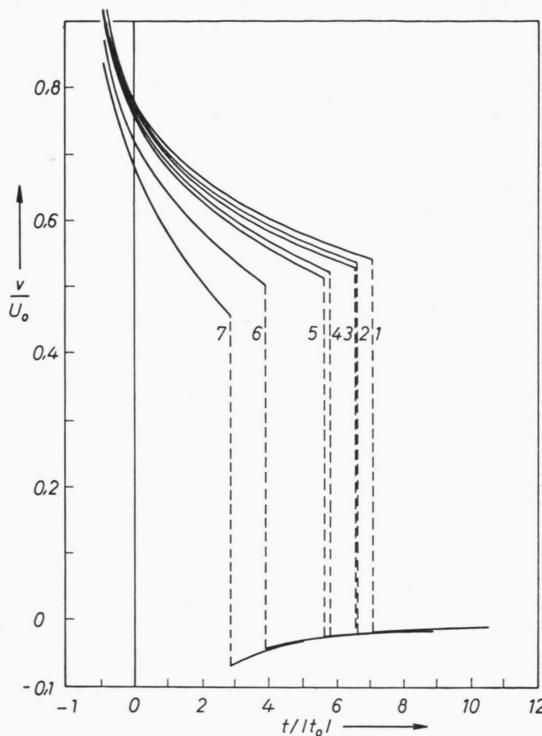


Abb. 8. Auf U_0 normierter Geschwindigkeitsverlauf an der Stelle r_0 als Funktion von $t/|t_0|$.

VII. Vergleich von Theorie und Messung

Aus den Kurven für Helium (Kurven Nr. 4) und unseren Berechnungen der Zustandsgrößen wurde für die Bedingungen des in 2 beschriebenen Experiments die radiale Verteilung von Temperatur und Elektronendichte für zwei Zeiten berechnet. Im ersten Zeitpunkt befindet sich die hinlaufende Stoßwelle bei $r = 2,5$ cm, im zweiten bei $r = 1$ cm. Für

die Rechnungen wurden in der Weg-Zeit-Kurve der Stoßfront

$$r = a(-t)^n \quad (8)$$

die Werte $a = 3,2 \text{ cm}/\mu\text{sec}^{-n}$ und $n = 0,86$ benutzt. Die Auswertung der Schmieraufnahmen zeigt, daß diese Werte eine gute Darstellung des gemessenen Verlaufs ergeben. In Abb. 9 sind neben den gerechneten Kurven die spektroskopisch bestimmten Werte für T und n_e eingezeichnet. Man sieht, daß sich im Rahmen der Meßgenauigkeit Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ergibt.

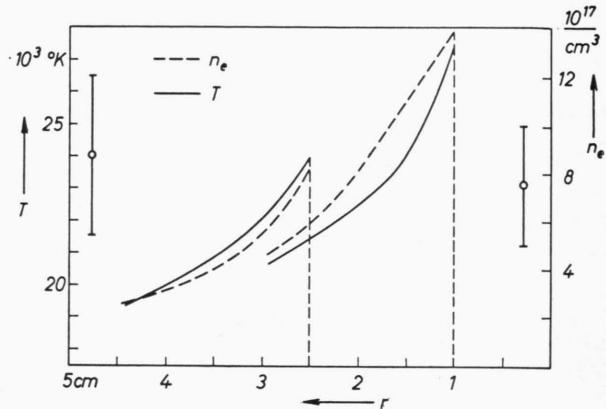


Abb. 9. Berechnete Radialverteilung der Temperatur und Elektronendichte hinter der einlaufenden Stoßwelle zu zwei verschiedenen Zeiten. Im Zeitpunkt t_1 befindet sich die Front bei $r = 2,5$ cm, zur Zeit t_2 bei $r = 1$ cm ($a = 3,2 \text{ cm } \mu\text{sec}^{-n}$). Die eingetragenen Meßwerte sind spektroskopisch bestimmte Mittelwerte zur Zeit t_1 .

Diese Arbeit wurde vom Bundesminister für Atomkernenergie durch Personal- und Sachbeihilfen gefördert. Für die Hilfe bei den Rechnungen danken wir Fräulein L. JANZ. Herrn Prof. Dr. W. LOCHTE-HOLTGREVEN danken wir für die großzügige Unterstützung, die er der Arbeit zukommen ließ.